На правах рукописи

Шергин Сергей Николаевич

Обратные задачи для математических моделей соболевского типа

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК — 2019

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Пятков Сергей Григорьевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Фамилия Имя Отчество кандидат физико-математических наук Фамилия Имя Отчество
Ведущая организация:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»

Защита состоится DD mmmmmm YYYY г. в XX^{yy} часов на заседании диссертационного совета Д212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете, по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета и на сайте:
ссылка

Автореферат разослан DD mmmmmm YYYY года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, доцент А.В. Келлер

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Математические модели, основанные на псевдопараболических уравнениях и в целом на уравнениях Соболевского типа возникают при описании процессов тепломассопереноса, процессов фильтрации, волновых процессов и во многих других областях. По-видимому, первым, кто рассмотрел некоторые математические модели описываемых уравнениями, впоследствии названные уравнениями типа Соболева был Пуанкаре Г. в 1887 году. Наиболее известными моделями такого типа являются модели Буссинеска-Лява, Баренблатта-Желтова-Кочиной, Соболева, Бенджамена-Бона-Махони-Бюргерса, Розенау-Бюргерса и другие. Уравнения Буссинеска или Буссинеска-Лява, описывающее продольные колебания стержней, движение длинных волн, распространение волн на мелкой воде и ряд других физических процессов, рассматриваются в работах А. Лява, А.Б. Альшина, Ю.Д. Плетнера, А.Г. Свешникова, T. Kano, G. Whitham. В 1960, Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов И. Н. Кочина для описания фильтрации в трещиноватых средах предложили математическую модель вида $(\sigma - \Delta_x)u_t + k\Delta u = f, \quad n = 3$, где физический смысл функции u – давление жидкости в трещинах. Систематическое изучение уравнений Соболевского типа началось по-видимому, с работ Р.Е. Шоуолтера. В ряде работ Х.Гаевского, К. Грегера и К. Захариаса рассматриваются вопросы локальной разрешимости для нелинейных уравнений псевдопараболического типа. Применение полугруппового подхода к общей теории сингулярных уравнений соболевского типа получило глубокое и широкое развитие в работах Г.А. Свиридюка и В.Е. Федорова. Близкие результаты были также получены в работах A. Favini и ряда других авторов.

В целом можно сказать, что на данный момент краевые задачи и задачи Коши для уравнений Соболевского типа исследованы достаточно полно. Тем не менее, имеется и ряд пробелов. В частности пока нет общей теории разрешимости краевых задач для таких уравнений, особенно если имеется зависимость коэффициентов от всех переменных, включая время и в случае неограниченных областей в пространствах W_p^s с $p \neq 2$.

Обратные задачи для уравнений Соболевского типа исследовались крайне мало. Исследование обратных задач для псевдопараболических уравнений началось в 1980-х гг. Первый результат, полученный В. Ранделлом, относится к обратным задачам идентификации неизвестной функции источника $f = g(t)\varphi(x)$ в уравнении (1) с линейными операторами L и M, $L = M + I$. Ранделл доказал глобальные теоремы существования и единственности для функции $\varphi(x)$, в случае финального условия переопределения и для функции $g(t)$ в случае когда дополнительно к условия Дирихле на границе задается значение нормальной производной от решения в точке на границе области. Другой тип обратных задач для (1) рассмотрен в работах А. Асанова, Е.Р. Атаманова, A. Favini. Их работы посвящены задачам восстановления ядра в интегральном члене уравнения (1) с интегродифференциальным оператором M с условием переопределения общего вида типа функционала от решения. Работы Kh. Khompysh посвящены определению функции источника $f = f(x)$ и $f(t)$, соответственно, по интегральному условию переопределения для уравнения Кельвина-Фойгта.

Отметим также работы А.Ш. Любановой, касающиеся коэффициентных обратных задач для уравнения фильтрации. Аналогичные задачи рассмотрены в работах M. Yaman, K. Khompysh, А.И. Кожанова, Г.В. Намсараевой, Я.Т. Мегралиева, где используется интегральное условие переопределения.

В работах В.Е. Федорова, восстанавливается уже элемент банахового пространства по интегральному условию переопределения.Сошлемся также на монографию А.И. Кожанова, где также рассмотрены ряд модельных обратных задач для уравнений составного типа. В работах Я.Е. Мехралиева рассмотрена при $n = 1$ задача об определении младшего коэфффициента в псевдопараболическом уравнении третьего порядка и для уравнения Буссинеска-Лява в нашей постановке, т.е. переопределение является точечным. Построенное решение является классическим, т.е. принадлежит некоторому пространству непрерывных функций.

Абстрактные задачи управления для уравнений типа Соболева рассматривались в работах Федорова В.Е., Келлер А.В., Манаковой Н.А., Загребиной С.А., Замышляевой А.В. Отметим также работы Н.Д. Ивановой, где рассмотрен ряд задач для уравнений Соболевского типа. Получен ряд абстрактных результатов об определении неизвестной функции, зависящей от параметра t и входящей в младшую часть уравнения нелинейно.

Отметим ряд работ и монографий С.И. Кабанихина, Ю.Я. Белова, М. Иванчова, В. Исакова, А.И. Прилепко, где сделаны существенные продвижения в теории обратных задач для параболических уравнений и систем.

В целом, стоит отметить, что на данный момент имеется сравнительно небольшое количество работ, посвящённых вопросам корректности рассматриваемых обратных задач, основные полученные ранее результаты связаны с некоторыми модельными ситуациями и в основном в одномерном случае. Поэтому тематика работы представляется актуальной.

Постановка задачи.

Работа посвящена исследованию некоторых классов обратных задач для математических моделей Соболевского типа, построению численных алгоритмов для решения этих задач, проведению численных экспериментов и созданию соответствующих комплексов программ. Основное внимание уделено уравнениям третьего и четвертого порядка, наиболее часто возникающих в приложениях. Первая часть работы посвящена математическим моделям, описываемых уравнениями вида

$$LU_t + MU = f, \quad (x,t) \in Q = G \times (0,T), \tag{1}$$

$$L_0 U_{tt} + L_1 U_t + L_2 U = f, \quad (x,t) \in Q = G \times (0,T), \tag{2}$$

где $L, M,\ L_0, L_1, L_2$ - операторы второго порядка по переменным x с коэффициентами зависящими от всех переменных, G – ограниченная область в $R^n (n \geq 1)$ с границей $\Gamma \in C^2$. Уравнение (1) дополняется краевыми и начальными условиями:

$$RU|_S = \varphi, \quad S = \Gamma \times (0,T), \tag{3}$$

$$U|_{t=0} = U_0(x), \tag{4}$$

где $Ru = u$ или $Ru = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(x,t) u_{x_i} + \sigma(x,t)u$. В случае уравнения (2) данные Коши (4) заменяются соответственно на данные

$$U|_{t=0} = U_0(x), \ \ U_t|_{t=0} = U_1(x). \tag{5}$$

В качестве условий переопределения мы рассматриваем значения решения U в отдельных точках. То есть условия переопределения имеют вид

$$U(x_i, t) = \psi_i(t), \qquad (i = 1, 2, .., m), \tag{6}$$

где x_i произвольные точки лежащие в G. Условия такого типа очень часто возникают в приложениях. Особенностью рассматриваемых задач, в отличие от некоторых известных результатов, является тот факт, что неизвестные коэффициенты и правая часть уравнений представляют из себя произвольные линейные комбинациями неизвестных функций, зависящих от времени, что фактически позволяет строить приближение неизвестных коэффициентов, зависящих от всех переменных, в виде конечных отрезков рядов.

Второй класс рассматриваемых задач - обратные задачи для математических моделей, возникающих при описании процессов распространения электромагнитных волн в анизотропных средах и при рассмотрении нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости. Задача в общем виде состоит формулируется как задача об определении коэффициентов $k_i(t)$, входящих в уравнение вида

$$L_0 u + \sum_{i=1}^{m} \kappa_i * L_i(x,t)u = f, \tag{7}$$

Уравнение (2) дополняется условиями переопределения

$$\Psi_j(u)(t) = \psi_j(t), \tag{8}$$

где Ψ_i – некоторые функционалы и краевыми условиями

$$Bu|_S = g(x,t),\ S = \partial G \times (0,T), \tag{9}$$

где $Bu = u$ или $Bu = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i(x,t)u_{x_i} + \sigma(x,t)u$. Здесь L_0 – эллиптический оператор второго порядка, L_i – дифференциальные операторы второго порядка и $u * v = \int\limits_0^t u(\tau)v(t-\tau)\,d\tau$.

Целью диссертационной работы является исследование математических моделей соболевского типа и их обобщений с последующей разработкой, обоснованием и программной реализацией эффективных численных методов решения соответствующих обратных задач математической физики.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать вопросы корректности обратных задач с точечными условиями переопределения об определении функции источника и параметров среды для математических моделей Соболевского типа третьего и четвертого порядка.

2. Исследовать вопросы корректности обратных задач общего вида для математических моделей квазистационарных электромагнитных волн в анизотропных средах и нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости.

3. Разработать на основе полученных теоретических результатов эффективные численные методы и алгоритмы поиска приближённых решений с помощью методов конечных элементов и конечных разностей.

4. Реализовать в виде комплекса программ для решения задач на компьютере разработанные численные методы и алгоритмы, провести вычислительные эксперименты на модельных примерах и проанализировать полученные результаты.

Научная новизна: Впервые исследованы вопросы корректности для многомерных достаточно общих классов обратных задач для математических моделей соболевского типа третьего и четвертого порядка. В отличие от предыдущих работ в диссертации рассмотрены вопросы о построении неизвестных функций, входящих в уравнение, в виде конечных отрезков ряда по известному базису. Рассмотрены как линейные задачи об определении правой части, так и нелинейные коэффициентные задачи. Получены новые результаты корректности обратных задач с условиями переопределения общего вида для математических моделей квазистационарных электромагнитных волн в анизотропных средах и нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости. Построены и реализованы новые прямые итерационные численные методы для нахождения неизвестных коэффициентов в задачах фильтрации и задачах определения параметров среды в математических моделях квазистационарных электромагнитных волн и нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости. Разработаны программные комплексы численного определения коэффициента средних гидравлических характеристик в обратных задачах фильтрации и численного определения параметров среды в математических моделях квазистационарных электромагнитных волн.

Научная и практическая значимость диссертации определяется тем, что теоретические результаты работы развивают теорию уравнений соболевского типа и теорию дифференциальных уравнений в целом. Новые методы и подходы к решению обратных задач, описанные в работе, могут быть использованы в дальнейшем при изучении самых разных задач экологии, теории фильтрации, гидродинамике, химии и во многих других областях. Разработанный программный комплекс позволяет проводить вычислительные эксперименты и может быть использован в практических задачах.

Степень достоверности результатов проведённых исследований. Полученные результаты обеспечиваются строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, подтверждаются согласием между теоретическими положениями и результатами вычислительных экспериментов, проведённых в данной работе и исследованиями других авторов. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором лично.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных семинарах в Югорском государственном университете (г. Ханты-Мансийск) и ряде конференций. Они были представлены на 52-ой Международной научной студенческой конференции МНСК-2014 (Новосибирск, 2014), Международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», посвящённая 70-летию со дня рождения В. Н. Врагова (Улан-Уде, 2015), Международной школе конференции «Соболевские чтения» (Новосибирск, 2016), Международной конференции по математическому моделированию МКММ-2017 (Якутск, 2017), Международной конференции «Понтрягинские чтения - XXIX» (Москва, 2018), Международной научно-практической конференции «ИНФО-2018» (Сочи, 2018), Всероссийской научной конференции с международным участием «ИТИС-2019» (Ханты-Мансийск, 2019).

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов РФФИ: Грант № 15-01-06582, Грант № 18-01-00620, Грант № 18-41-860003.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 14 печатных изданиях [1-14], 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1-5], имеются также свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [6,7]. В совместных с научным руководителем работах научному руководителю принадлежит постановка задачи, в диссертацию вошли результаты, полученные ее автором лично.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, проведен анализ существующих работ других авторов по указанной тематике, сформулированы цели и задачи работы. Также в данной части работы сформулированы положения, выносимые на защиту, степень достоверности и апробация результатов диссертационной работы.

В **первой главе** приводится ряд вспомогательных утверждений, используемых в доказательствах основных результатов.

Вторая глава состоит из 5 параграфов. В ней рассматриваются обратные задачи (1), (3), (4), (6) и (2), (3), (5), (6). В первом параграфе рассматривается задача об определении вместе с решением U неизвестной правой части f уравнения (1). Пусть

$$\begin{aligned} LU &= \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x,t)U_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)U_{x_i} + a_0(x,t)U, \\ MU &= \sum_{i,j=1}^{m} b_{ij}(x,t)U_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i(x,t)U_{x_i} + b_0(x,t)U, \end{aligned} \tag{10}$$

$$f = \sum_{i=1}^{m} c_i(t)f_i(x,t) + f_0(x,t), f_i \in L_\infty(0,T;L_p(G)) \ (i = 1,2,..,m),$$

где функции f_i даны, $c_i(t)$ подлежат определению с использованием условий (6). Фиксируем параметр $p > n$ и предположим, что

$$\begin{gathered} a_{ij} \in C(\overline{Q}), \quad b_{ij} \in L_\infty(Q), \quad (i,j = 1,2,..,n), \\ a_i, a_0 \in C([0,T]; L_p(G)), \quad b_i, b_0 \in L_p(Q). \end{gathered} \tag{11}$$

$$\partial_t^k \gamma_i, \partial_t^k \sigma \in L_\infty(0,T; C^1(\overline{\Gamma})), \ k \le 1, \ |\sum_{i=1}^n \gamma_i n_i| \ge \delta_1 > 0 \ \forall \ (x,t) \in S, \tag{12}$$

где n – единичный вектор внешней нормали к Γ и δ_1 - некоторая положительная постоянная.

$$\begin{gathered} a_0 \le 0 \ \text{ п.в. в } \ Q \text{ в случае условий Дирихле и } a_0 \le 0 \ \text{ п.в. в } \ Q \\ \text{и } \ a_0 < 0 \text{ п.в. в некоторой окрестности} \\ \text{границы } S \text{ в случае условий с косой производной.} \end{gathered} \tag{13}$$

Условия согласования:

$$\varphi(x,0)|_\Gamma = R(0)U_0(x)|_\Gamma, \quad \psi_i(0) = U_0(x_i), \quad (i = 1,2,..,m). \tag{14}$$

Условия корректности. Пусть B матрица с элементами
$b_{ij} = L^{-1} f_i(x_j,t)$ и пусть существует $\delta_0 > 0$ такая, что

$$|detB| \ge \delta_0 \ \text{ для п.в. } \ t \in [0,T], \tag{15}$$

где $L^{-1} f_i$ есть решение U_i задачи: $LU = f_i, \quad RU|_S = 0$.

Пусть $s_0 = 2-1/p$ в случае условий Дирихле и $s_0 = 1-1/p$ в противном случае.

Теорема 1.1. *Пусть условия* (11)-(15) *выполнены и*

$$f_0 \in L_p(Q), \quad U_0(x) \in W_p^2(G), \ \varphi \in W_p^1(0,T; W_p^{s_0}(\Gamma)), \ \psi_i \in W_p^1(0,T),$$

где $i = 1,2,\ldots,m$. *Тогда существует единственное решение задачи* (1),(3),(4),(6) $U \in W_p^1(0,T; W_p^2(G))$, $c_i(t) \in L_p(0,T)$, $(i = 1,2,..,m)$, *удовлетворяющее оценке*

$$\|U\|_{W_p^1(0,T;W_p^2(G))} + \sum\nolimits_{i=1}^m \|c_i(t)\|_{L_p(0,T)} \le c(\|f_0\|_{L_p(Q)}$$

$$+\|\varphi\|_{W_p^1(0,T;W_p^{s_0}(G))} + \sum\nolimits_{i=1}^m \|\psi_i\|_{W_p^1(0,T)} + \|U_0\|_{W_p^2(G)}),$$

где c – некоторая постоянная не зависящая от функций f_0, φ, ψ_i.

Во втором параграфе рассматривается обратная задача об определении неизвестных функций, которые входят как в правую часть уравнения, так и в сам оператор как коэффициенты. Часть коэффициентов оператора M зависящих от t считаются неизвестными, и оператор M и f имеют вид:

$$MU = M_{r_0}U + \sum_{k=r_0+1}^{m} c_k(t)M_kU, \ f = \sum_{i=1}^{r_0} c_i(t)f_i(x,t) + f_0(x,t)$$

$$M_kU = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^k(x,t)U_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i^k(x,t)U_{x_i} + b_0^k(x,t)U.$$

Фиксируем параметр $p > n$ и предположим, что

$$b_{ij}^k \in L_\infty(Q), \ b_i^k, b_0^k \in L_\infty(0,T;L_p(G)) \ \ (k = r_0+1,\dots,m), \tag{16}$$

$$b_{ij}^{r_0} \in L_p(0,T;L_\infty(G)), \ b_i^{r_0}, b_0^{r_0} \in L_p(Q), \tag{17}$$

$$a_{ij} \in C(\overline{Q}), \ \ a_i, a_0 \in C([0,T];L_p(G)) \ \ (i,j = 1,2,..,n), \tag{18}$$

В случае краевых условия с косой производной мы также требуем, чтобы

$$\begin{gathered} \partial_t^k\gamma_i, \partial_t^k\sigma \in L_\infty(0,T;C^1(\overline{\Gamma})), \ k \le 1, \\ |\textstyle\sum_{i=1}^n \gamma_i n_i| \ge \delta_1 > 0 \ \forall \ (x,t) \in S, \end{gathered} \tag{19}$$

Условия согласования:

$$\psi_i(0) = U_0(x_i) \ \ (i = 1,2,..,m), \ R(0)U_0|_\Gamma = \varphi(x,0). \tag{20}$$

Построим функцию $\Phi \in C([0,T];W_p^2(G))$ $(p > n)$ такую, что

$$\Phi \in W_p^1(0,T;W_p^2(G)), \ \ \Phi|_{t=0} = U_0(x), R(t)\Phi|_S = \varphi. \tag{21}$$

Построим матрицу B со строками

$$L^{-1}f_1(x_j,t), ..., L^{-1}f_{r_0}(x_j,t), -L^{-1}M_{r_0+1}\Phi(x_j,t), ..., -L^{-1}M_m\Phi(x_j,t),$$

где $j = 1,2,...,m$, и предположим , что существуют постоянные $\delta_0 > 0$, $\tau_0 > 0$ такие, что

$$|\det B| \ge \delta_0 \ \text{ для п.в. } \ t \in [0,\tau_0]. \tag{22}$$

Здесь $L^{-1}f_i$ есть решение U_i задачи: $LU_i = f_i$, $U_i|_{t=0} = 0$, $R(t)U_i|_S = 0$. Локально по времени, условие (22) от выбора функции Φ не зависит.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия* (13), (16)-(20), (22) *и*

$$f_0 \in L_p(Q), \ U_0(x) \in W_p^2(G),$$

$$\varphi \in W_p^1(0,T;W_p^{2-1/p}(\Gamma)), \ \psi_i \in W_p^1(0,T), i = 1,2,\dots,m, \quad p > n.$$

Тогда существует постоянная $\gamma_0 > 0$ *такая, что на промежутке* $[0,\gamma_0]$ *существует единственное решение* $(U, c_1, \dots, c_r)$ *задачи* (1),(3),(4),(6) *такое, что*

$$U \in W_p^1([0,\gamma_0];W_p^2(G)), \ c_i(t) \in L_p(0,\gamma_0) \ (i = 1,2,\dots,m).$$

В третьем параграфе рассматривается задача об определении правой части уравнения (2). Мы предполагаем ниже, что $\Gamma \in C^2$ и считаем, что операторы L_k $(k = 0, 1, 2)$ имеют вид

$$L_k U = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(x,t) U_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i^k(x,t) U_{x_i} + a_0^k(x,t) U,$$

где все коэффициенты вещественны, а оператор L_0 предполагается эллиптичным, т.е. существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая что:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 \xi_i \xi_j \geq \delta_0 |\xi|^2 \ \ \forall\ \xi \in R^n, \ \ \forall\ (x,t) \in \overline{Q}.$$

Мы фиксируем параметр $p > n$ и предположим что

$$\begin{gathered} a_{ij}^0 \in C(\overline{Q}), \ \ a_i^0, a_0^0 \in C([0,T]; L_p(G)), \ a_{ij}^k \in L_p(0,T; L_\infty(G)), \\ a_i^k, a_0^k \in L_p(Q) \ (i,j = 1,2,\ldots,n, \ k = 1,2. \end{gathered} \tag{23}$$

В случае краевых условия с косой производной мы также требуем, чтобы

$$\partial_t^k \gamma_i, \partial_t^k \sigma \in L_\infty(0,T; C^1(\overline{\Gamma})), \ k \leq 2, |\sum_{i=1}^{n} \gamma_i n_i| \geq \delta_1 > 0 \ \forall\ (x,t) \in S, \tag{24}$$

Пусть правая часть в (2) имеет вид:

$$f = \sum_{i=1}^{m} c_i(t) f_i(x,t) + f_0(x,t), \ f_i \in L_\infty(0,T; L_p(G)). \tag{25}$$

Условия согласования:

$$\begin{gathered} \psi_i(0) = U_0(x_i), \ \ \psi_{it}(0) = U_1(x_i), \ \varphi(x,0) = R(0)U_0(x), \\ \varphi_t(x,0) = R(0)U_1(x) + R_t(0)U_0(x), \ x \in \Gamma \ (i = 1,2,..,m) \end{gathered} \tag{26}$$

Условия корректности. Пусть B матрица с элементами $b_{ij} = L_0^{-1} f_i(x_j, t)$ и пусть существует $\delta_0 > 0$ такая, что

$$|\det B| \geq \delta_0 \ \text{ для п.в. } \ t \in [0,T], \tag{27}$$

где $L_0^{-1} f_i$ есть решение U_i задачи: $L_0 U_i = f_i, \ \ R(t) U_i|_S = 0$.

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия* (23)-(27), *коэффициент* a_0^0 *удовлетворяет условию* (13) *и*

$$\begin{gathered} f_0 \in L_p(Q), \ U_j(x) \in W_p^2(G) \ (j = 0,1), \ \varphi \in W_p^2(0,T; W_p^{s_0}(G)), \\ \psi_i \in W_p^2(0,T), i = 1,2,\ldots,m, \quad p > n. \end{gathered} \tag{28}$$

Тогда существует единственное решение задачи (2), (3), (5), (6) *такое, что:*

$$U \in W_p^2(0,T;W_p^2(G)), \quad c_i(t) \in L_p(0,T) \quad (i=1,2,..,m).$$

В четвертом параграфе рассматривается также уравнение (2) с операторами L_s $(s=0,1,2)$ и функцией f вида

$$L_0U = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0(x,t)U_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i^0(x,t)U_{x_i} + a_0^0(x,t)U,$$

$$L_sU = L_{0s}U + \sum_{k=r_{s-1}+1}^{r_s} c_k(t)L^kU, \; f = \sum_{i=1}^{r_0} c_i(t)f_i(x,t) + f_0(x,t), \; m = r_2,$$

$$L^kU = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(x,t)U_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i^k(x,t)U_{x_i} + a_0^k(x,t)U,$$

$$L_{0s}U = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{0s}(x,t)U_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i^{0s}(x,t)U_{x_i} + a_0^{0s}(x,t)U.$$

Условия на коэффициенты уравнения имеют вид

$$\begin{gathered} a_{ij}^0 \in C(\overline{Q}), \quad a_i^0, a_0^0 \in C([0,T];L_p(G)), \; a_{ij}^k \in L_\infty(Q), \\ a_i^k, a_0^k \in L_\infty(0,T;L_p(G)) \;\; (i,j=1,2,..,n, \; k=1,2,\ldots,r_2), \\ a_{ij}^{0s} \in L_p(0,T;L_\infty(G)), \; a_i^{0s}, a_0^{0s} \in L_p(Q) \;\; (i,j=1,2,..,n, \; s=1,2). \end{gathered} \tag{29}$$

В случае краевых условия с косой производной мы также требуем, чтобы

$$\partial_t^k\gamma_i, \partial_t^k\sigma \in L_\infty(0,T;C^1(\overline{\Gamma})), \; k \leq 2, |\sum_{i=1}^{n}\gamma_i n_i| \geq \delta_1 > 0 \; \forall \; (x,t) \in S, \tag{30}$$

Условия согласования:

$$\begin{gathered} \psi_i(0) = U_0(x_i), \quad \psi_{it}(0) = U_1(x_i), \quad (i=1,2,..,m), \\ \varphi(x,0) = R(0)U_0(x), \quad \varphi_t(x,0) = R(0)U_1(x) + R_t(0)U_0(x), \; x \in \Gamma. \end{gathered} \tag{31}$$

Пусть функция $\Phi \in C^1([0,T];W_p^2(G))$ $(p > n)$ такова, что $\Phi_{tt} \in L_p(0,T;W_p^2(G))$, $\Phi|_{t=0} = U_0(x)$, $\Phi_t|_{t=0} = U_1(x)$, $\Phi|_S = \varphi$. Построим матрицу B, j-я строка которой имеем вид

$$\begin{gathered} L_0^{-1}f_1(x_j,t), L_0^{-1}f_2(x_j,t), \ldots, L_0^{-1}f_{r_0}(x_j,t), -L_0^{-1}L^{r_0+1}\Phi_t(x_j,t), \ldots, \\ -L_0^{-1}L^{r_1}\Phi_t(x_j,t), -L_0^{-1}L^{r_1+1}\Phi(x_j,t), \ldots, -L_0^{-1}L^{r_2}\Phi(x_j,t), \quad j=1,2,\ldots,r_2, \end{gathered}$$

и предположим , что существует $\delta_0 > 0$, $\tau_0 > 0$ такие, что

$$|\det B| \geq \delta_0 \;\; \text{для п.в.} \;\; t \in [0,\tau_0], \tag{32}$$

где $L_0^{-1}f_i$ есть решение U_i задачи $L_0U_i = f_i, \quad R(t)U_i|_S = 0$. Легко показать, что локально по времени условие (32) не зависит от выбора функции Φ.

Теорема 1.4. *Пусть выполнены условия* (29)-(32), *коэффициент* a_0^0 *удовлетворяет условию* (13) *и*

$$f_0 \in L_p(Q),\ f_i \in L_\infty(0,T;L_p(G)), \quad U_j(x) \in W_p^2(G)\ (j=0,1),$$

$$\varphi, \varphi_t, \varphi_{tt} \in L_p(0,T;W_p^{s_0}(G)), \quad \psi_i \in W_p^2(0,T), i=1,2,\ldots,r_2, \quad p>n.$$

Тогда существует постоянная $\gamma_0 > 0$ *такая, что на промежутке* $[0,\gamma_0]$ *существует единственное решение* $(U, c_1, \ldots, c_{r_2})$ *задачи* (2), (3), (5), (6) *такое, что*

$$U \in W_p^2(0,\gamma_0;W_p^2(G)), \quad c_i(t) \in L_p(0,\gamma_0)\ (i=1,2,\ldots,m).$$

В пятом параграфе описывается алгоритм численного решения обратных задач для математических моделей Соболевского типа. Они основаны на способе построения приближённого решения в теоремах существования. Кроме того, используется соответствующая теорема об устойчивости решений соответствующих обратных задач. Считается, что условия, при выполнении которых обратная задача корректна выполнены. Вначале мы используем метод конечных элементов, сводя прямую задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Система решается с помощью метода конечных разностей (неявная схема). Обратная задача решается с помощью специальной итерационной процедуры. Приводятся результаты численных экспериментов и их сравнение при различных входных данных. Алгоритм показывает хорошую сходимость, графики исходных функций и их приближение практически идентичны.

В **третьей главе** рассматриваются математические модели возникающие при описании процессов распространения электромагнитных волн в анизотропных средах и нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости. Рассматриваются обратные задачи об определении коэффициентов k_i для общих уравнений вида (7), где $L_k u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(x,t)u_{x_i,x_j} + \sum_{i=1}^n a_i^k(x,t) + a_0^k(x,t)u$. Считаем, что все коэффициенты операторов L_k $(k=0,1,\ldots,m)$ вещественны, а оператор L_0 предполагается эллиптичным. Мы фиксируем параметр $p>n$ (для простоты) и предположим что

$$
\begin{gathered}
a_{ij}^0 \in C(\overline{Q}), \quad a_i^0, a_0^0 \in C([0,T]; L_p(G)),\ a_{ij}^k \in L_\infty(Q),\ a_{ijt}^0, \\
a_{ijt}^k \in L_p(0,T; L_\infty(G)),\ a_i^k, a_0^k \in L_\infty(0,T; L_p(G)), a_{0t}^k, a_{it}^k \in L_p(Q) \\
(i,j = 1,2,\ldots,n,\ k = 1,2,\ldots,m), \\
\gamma_i, \gamma_{it}, \sigma, \sigma_t \in C([0,T]; C^1(\overline{\Gamma}))\ (i = 1,\ldots,n), \\
|\sum_{i=1}^n \gamma_i n_i| \geq \delta_1 > 0\ \forall (x,t) \in S,
\end{gathered} \tag{33}
$$

где $\vec{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_n)$ – единичный вектор внешней нормали к S.

Построим функцию $u_0(x)$ как решение задачи $L_0(x,0,D)u_0 = f(x,0)$, $R(x,0,D)u_0 = g(x,0)$.

Условия корректности. Пусть B матрица с элементами $b_{ij} = \Psi_i(L_0^{-1} L_j(x,0) u_0(x))$ и существует $\delta_2 > 0$ такая, что

$$
|\det B| \geq \delta_2 \quad \forall t \in [0,T], \tag{34}
$$

где $L_0^{-1} f$ есть решение v_0 задачи: $L_0 v_0 = f, \quad B v_0|_\Gamma = 0$.

Считаем, что функционалы Ψ_j удовлетворяют условиям

$$
\Psi_j \in L(W_p^2(G), \mathbb{R}), \quad \Psi_j(u_0) = \psi_j(0),\ j = 1,2,\ldots,m, \tag{35}
$$

и, таким образом, $\Psi_j \in (W_p^2(G))^*$. Используя краевые условия (4), получим

$$
Ru_0(x) = g(x,0). \tag{36}
$$

Используя условия (6), получим необходимое условие разрешимости

$$
\Psi_j(u_0(x)) = \psi_j(0) \quad j = 1,2,\ldots,m. \tag{37}
$$

Теорема 1.5. *Пусть* $f, f_t \in L_p(Q)$, *выполнены условия* (33)-(37), $g \in C([0,T]; W_p^{s_0}(\Gamma))$, $g_t \in L_p(0,T; W_p^{s_0}(\Gamma))$ $(p > n)$, $\psi_j \in W_p^1(0,T)$ $(j = 1,2,\ldots,m)$. *Тогда существует единственное решение задачи* (7)-(9) *такое, что* $u_t \in L_p(0,T; W_p^2(G))$, $u \in C([0,T]; W_p^2(G))$, $k_i \in L_p(0,T)$ $(i = 1,2,\ldots,m)$.

В конце главы описывается алгоритм численного решения задачи. Численные эксперименты проводятся в случае краевых условий Дирихле при $m = 2$ для математической модели квазистационарных электромагнитных волн, т.е. рассматривается уравнение

$$
\Delta u + \int_0^t \sum_{m=1}^2 p_m(s) u_{x_m x_m}(t-s) ds = f(x,t), \tag{38}
$$

в области $Q = G \times (0,T), x = (x_1, x_2) \in G \subset R^2, t \in [0,T]$. Численный алгоритм основан на методе конечных элементов. Приводятся результаты численных экспериментов и их сравнение при различных входных данных. Алгоритм показывает хорошую сходимость, графики исходных функций и их приближение практически идентичны.

В **заключении** приведены основные выводы по теме диссертации, обсуждаются перспективы дальнейшего развития и приложения к практическим задачам.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Исследованы вопросы корректности обратных задач с точечными условиями переопределения об определении функции источника и параметров среды для математических моделей Соболевского типа третьего и четвертого порядка.

2. Исследованы вопросы корректности обратных задач с условиями переопределения общего вида для математических моделей квазистационарных электромагнитных волн в анизотропных средах и нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости

3. На основе полученных теоретических результатов разработаны алгоритмы и эффективные численные методы поиска приближённых решений, основанные на методах конечных элементов и конечных разностей.

4. Созданы и зарегистрированы комплексы программ для численного решения обратных задач определения параметров среды и неизвестных источников в математических моделях соболевского типа, проведены числительные эксперименты на модельных примерах и проанализированы полученные результаты.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Шергин С.Н.* О некоторых классах обратных задач для псевдопараболических уравнений / С.Н. Шергин, С.Г. Пятков // Математические заметки СВФУ 2014. 21, No. 2 С. 106-116 (ВАК)
2. *Шергин С.Н.* Некоторые математические модели фильтрационной теории / С.Н. Шергин, С.Г. Пятков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: математическое моделирование и программирование 2015 8, No. 2 С. 105-116 (Scopus, WoS)
3. *Шергин С.Н.* Обратные задачи для математических моделей соболевского типа / С.Н. Шергин, С.Г. Пятков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: математическое моделирование и программировани 2016 9, No. 2 С. 75-89 (Scopus,

WoS)
4. *Шергин С.Н.* Обратные задачи для математической модели квазистационарных электромагнитных волн в анизотропных неметаллических средах с дисперсией / С.Н. Шергин, С.Г. Пятков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: математическое моделирование и программирование 2018 11, No. 1 44-59 (Scopus, WoS)
5. *Шергин С.Н.* О некоторых коэффициентных обратных задачах с точечным переопределением для математических моделей фильтрации / С.Н. Шергин, С.Г. Пятков, Е.И. Сафонов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: математическое моделирование и программирование 2019 12, No. 1 С. 82-95 (Scopus, WoS)
6. *Шергин С.Н.* Программа численного определения коэффициента средних гидравлических характеристик в обратных задачах фильтрации. Свидетельство 2018614756 / С.Н. Шергин, С. Г. Пятков, Е. И. Сафонов. 2018612031; заявл. 02.03.2018; зарегистр. 17.04.2018, Реестр программ для ЭВМ.
7. *Шергин С.Н.* Программа численного определения параметров среды в математических моделях квазилинейных электромагнитных волн. Свидетельство 2019613263 / С.Н. Шергин, С. Г. Пятков, Е. И. Сафонов. 2019612007; заявл. 21.02.2019; зарегистр. 13.03.2019, Реестр программ для ЭВМ.
8. *Шергин С.Н.* О решении некоторых обратных задач псевдопараболического типа / С.Н. Шергин // Материалы 52-ой Международной научной студенческой конференции МНСК-2014. Математика. 11 - 18 апреля 2014 г. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т. 2014. С. 103
9. *Шергин С.Н.* О некоторых математических моделях теории фильтрации / С.Н. Шергин, С.Г. Пятков //Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: Тезисы докладов. 22 – 27 июня 2015 г.Улан-Удэ, ВСГУТУ 2015. С. 333
10. *Шергин С.Н.* Некоторые классы обратных задач для уравнений соболевского типа / С.Н. Шергин, С.Г. Пятков // Международная школа-конференция «Соболевские чтения». Тезисы докладов. 18-22 декабря 2016 г. Новосибирск 2016. С. 165
11. *Шергин С.Н.* Обратные задачи для некоторых математических моделей соболевского типа / С.Н. Шергин // Сборник трудов МКММ-2017, 04-08 июля 2017 г. Якутск 2017. С. 26
12. *Шергин С.Н.* Разрешимость некоторых классов обратных задач для уравнений соболевского типа / С.Н. Шергин // Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции. 02-06 мая 2018 г. Москва 2018. С. 242
13. *Шергин С.Н.* Численное решение некоторой коэффициентной обратной задачи фильтрации / С.Н. Шергин // Инновационные, информационные и коммуникационные технологии. 1 - 10 октября 2018 г. Сочи 2018. С. 264
14. *Шергин С.Н.* Численное решение обратных задач для уравнения квазистационарных электромагнитных волн в анизотропных неметаллических средах фильтрации / С.Н. Шергин, Е.И. Сафонов // Информационные технологии и системы. Тр. Седьмой Междунар. науч. конф. 12 - 16 марта 2019 г. Ханты-Мансийск 2019. С. 44-49